Théorème de Springer

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 125 : Extension de corps. Exemples et applications.
- 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et $\mathbb{L}$ une extension de degré m impair sur $\mathbb{K}$. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ et on note aussi q son prolongement naturel sur $\mathbb{L}^n$. Si q possède un vecteur isotrope sur $\mathbb{L}^n$ alors q possède un vecteur isotrope dans $\mathbb{K}^n$.*

Preuve : On procède par récurrence sur m.
Pour $m = 1$, le résultat et clair.

On fixe $m > 1$ impair et on suppose la propriété vraie jusqu'au rang $m - 2$.
Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$, q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$ et $v \in \mathbb{L}^n$ un vecteur isotrope.

Si $\mathbb{L}$ est une tour d'extension $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha_1, \dots, \alpha_k]$ avec chaque étage de degré impair, il suffit de considérer un étage intermédiaire (extension de degré $< m$) et appliquer deux fois l'hypothèse de récurrence.
Supposons alors que $\mathbb{L}$ est une extension monogène $\mathbb{L} = \mathbb{K}[\alpha]$, Soit $\mu \in \mathbb{K}[X]$ le polynôme minimal de α, soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{L}^n$ isotrope non nul.
On a pour tout $i \in [\![1, n]\!], v_i \in \mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K} + \alpha\mathbb{K} + \dots + \alpha^{m-1}\mathbb{K}$ donc $v_i = g_i(\alpha)$ avec $g_i \in \mathbb{K}_{m-1}[X]$.
Donc $q(g_1(\alpha), \dots, g_n(\alpha)) = 0$ dans $\mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[X]/(\mu)$ donc $q(g_1, \dots, g_n) = \mu h$ avec $h \in \mathbb{K}[X]$.

Étape 1 : Montrons que l'on peut supposer les g_i sont premiers entre eux

Supposons que ce n'est pas le cas, soit $\delta = \text{pgcd}(g_1, \dots, g_n)$, on a $\delta^2 q(\frac{g_1}{\delta}, \dots, \frac{g_n}{\delta}) = \mu h$ car q homogène de degré 2 donc $\delta^2 | \mu h$
Or $\mu \not| \delta$ car sinon on aurait $(g_1(\alpha), \dots, g_n(\alpha)) = 0$ donc $v = 0$. Absurde car v est supposé non nul.
Ainsi, comme μ est irréductible, par théorème de Gauss on a $\delta^2 | h$.
Ainsi, $q(\frac{g_1}{\delta}, \dots, \frac{g_n}{\delta}) = \mu \frac{h}{\delta^2}$ et les $\frac{g_i}{\delta}$ sont premiers entre eux. Par conséquent, quitte à diviser les g_i par δ, on peut supposer les g_i premiers entre eux.

Étape 2 : Raisonnons sur le degré de h

Supposons $h = 0$

Soit $x \in \mathbb{K}$, il existe $i \in [\![1, n]\!], g_i(x) \neq 0$ car sinon $X - x | g_j$ pour tout j et les polynômes ne seraient pas premiers entre eux.
Le vecteur $(g_1(x), \dots, g_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ et $q(g_1(x), \dots, g_n(x)) = 0$.

Supposons $h \neq 0$

Comme $q(g_1, \dots, g_n) = \mu h$ et que q est un polynôme homogène de degré 2, $q(g_1, \dots, g_n)$ est de degré pair, comme $\deg(g_i) < m$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\deg(q(g_1, \dots, g_n)) < 2m$.
Donc $\deg(\mu h) < 2m$ et par conséquent $\deg h$ est impair et $< m$.
Ainsi, comme $\deg(h)$ est impair et que $\mathbb{K}[X]$ est factoriel, h admet une décomposition en produit d'irréductible et h admet un facteur h_0 de degré impair.
Posons $\mathbb{L}_0 = \mathbb{K}[X]/(h_0) \simeq \mathbb{K}[\beta]$ avec $\beta = \overline{X}$.
Comme $\deg(h_0) \leq \deg(h) < m$, $[\mathbb{L}_0 : \mathbb{K}] < [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ et comme β annule h_0, on a $q(g_1(\beta), \dots, g_n(\beta)) = 0$.
Il reste alors à montrer que $(g_1(\beta), \dots, g_n(\beta))$ est non nul.
On a $\forall i \in [\![1, n]\!], g_i(\beta) = 0 \implies h_0 | g_i$ (polynôme minimal divise le polynôme annulateur).
Or, les g_i sont premiers entre eux. Contradiction.

Étape 3 : Conclusion

Le vecteur $(g_1(\beta), \dots, g_n(\beta))$ est donc un nouveau vecteur isotrope dans une extension de degré strictement inférieur à m impaire (de degré $\deg(h_0)$).
On applique l'hypothèse de récurrence pour obtenir un vecteur isotrope dans $\mathbb{K}^n$. $\square$

Remarques

Remarque 1. Si l'extension est de degré pair, le resultat n'est plus vrai : $x^2 + y^2$ est anisotrope sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$ en prenant le vecteur $(1, i)$.

Remarque 2. Sur un corps fini, en dimension ≥ 3 et caractéristique $\neq 2$, toutes les formes quadratiques sont isotropes car si $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$, on a $q(x) = 0 \iff a_1 x_i^2 + a_2 x_2^2 = -\sum_{i=3}^{n} a_i x_i^2$.
D'où avec $x_3 \neq 0, x_4 = 0, \dots, x_n = 0$, on a $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = -a_3$ et cette équation admet une solution.
En dimension 1, s'il existe un vecteur isotrope, alors $q = 0$
En dimension 2, on a deux classes d'équivalences :
- $q((x, y)) = x^2 + y^2$, q est isotrope si et seulement si -1 est un carré.
- $q((x, y)) = x^2 + \alpha y^2$ avec α non carré et la forme quadratique est isotrope si et seulement si $-\alpha$ est un carré.

Références

[1] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie.* Calvage Mounet, 2019.